Navegando en la No Localidad:
Lagrangianos, Hamiltonianos y el teorema de Noether

I Congreso Trujillano de Gravitación y Cosmología

C. Heredia Pimienta

Universitat de Barcelona, Departament de Física Quàntica i Astrofísica
Institute of Cosmos Sciences (ICCUB)

ICCUB

Universidad Nacional de Trujillo
UNT

GRACOCC
Grupo de Investigación en Gravitación, Cosmología, Campos y Cuerdas

Lagrangianos No Locales: Mecánica

- Definiciones: ¿Qué significa
    - el espacio cinemático extendido
    - un lagrangiano no local
    - evolución temporal ?
- El principio de mínima acción
    - Las ecuaciones de Euler-Lagrange no locales
    - Formas de coordenar el espacio cinemático extendido
    - Espacio dinámico extendido
- **Teorema de Noether:** La función energía
- Formalismo Hamiltoniano: Transformación de Lagendre

Motivación

- Ejemplo en física con no localidad:

Electrodinámica clásica en medios dispersivos

$$S(\tilde{A}, R) = \frac{1}{4}\int_{|x|\leq R} \mathrm{d}x\, \tilde{F}_{ab}(x) \left(M^{abcd} * \tilde{F}_{cd}\right)_{(x)}$$

$$M^{abcd}(x) = (2\pi)^{-2} \left[m(x)\, \hat{\eta}^{a[c}\hat{\eta}^{d]b} + 2\varepsilon(x)\, u^{[a}\hat{\eta}^{b][c}u^{d]}\right]$$

Por esa razón proponemos esta estructura...

Motivado por: $\epsilon_0, m_0 \longrightarrow \epsilon(\mathbf{k},\omega), m(\mathbf{k},\omega)$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{D}(\mathbf{k},\omega)\\ \mathbf{H}(\mathbf{k},\omega)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\mathbf{D}(\mathbf{k},\omega) = \epsilon(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)\\ \mathbf{H}(\mathbf{k},\omega) = m(\mathbf{k},\omega)\mathbf{B}(\mathbf{k},\omega)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mathbf{D}(x) = (\epsilon * \mathbf{E})_{(x)}\\ \mathbf{H}(x) = (m * \mathbf{B})_{(x)}\end{array}$$

- Considera el siguiente Lagrangiano:

$$L([q],t) = q(t)\,(G * q)_{(t)} = q(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(t-\sigma)q(\sigma)$$

¿Cómo conseguimos las EOM?

$$= q(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(-\sigma)q(\sigma+t)$$

y aplicamos Taylor $\quad q(\sigma+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n!} q^{(n)}(t)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, q(t) q^{(n)}(t) \qquad \left(a_n := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \frac{\sigma^n G(-\sigma)}{n!} \right)$$

Pero, tenemos que integrar por partes infinitas veces...

Lo escribiremos de la siguiente forma:

$$L([q],t) = q(t)\,(G*q)_{(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, q(t) q^{(n)}(t)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \boxed{\sum_{n=0}^{N} q(t) q^{(n)}(t)}$$

entonces, aplicamos el formalismo de Ostrogradski:

EOMs: $$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right] = 0$$

Las ecuaciones diferenciales y los momentos no están correctamente definidos

Momentos: $$p_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-n-1} \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}$$

Definiciones

- **Def:** La clase de todas las (posibles) trayectorias cinemáticas

espacio cinemático $\mathcal{K} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^s)$

$q^i(t) \quad (i = 1, \ldots, s)$

- **Def:** El *espacio cinemático extendido* es $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \times \mathbb{R}$

para Lagrangianos dependientes explícitamente del tiempo

- **Def:** Un *Lagrangiano no local es* un functional sobre $\mathcal{K}'$

$$([q^i], t) \in \mathcal{K}' \longrightarrow L([q^i], t) \in \mathbb{R}$$

donde $[q^i]$ significa dependencia funcional en toda la curva $q^i(\sigma)$

Ej: $L([q], t) = q(t)\,(G * q)_{(t)} = q(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(t-\sigma) q(\sigma)$

Definiciones

- **Def:** Definimos el *operador evolución temporal* T_t como

$$([q^i],0) \xrightarrow{T_t} ([T_t q^i],t) \qquad \text{donde} \qquad T_t q^i(\sigma) = q^i(\sigma+t)$$

Ej: $$L(T_t q) = q(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(t-\sigma)q(\sigma) = q(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(-\sigma)q(\sigma+t)$$
$$= T_t q(0)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(-\sigma) T_t q(\sigma)$$

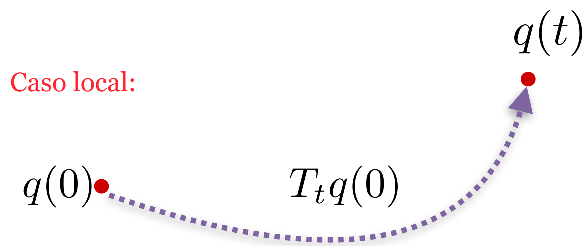
- **Obs:** Es posible establecer una correspondencia unívoca entre el formalismo de Ostrogradsky de "orden infinito" y el no local a través de las series formales de Taylor (FTS)

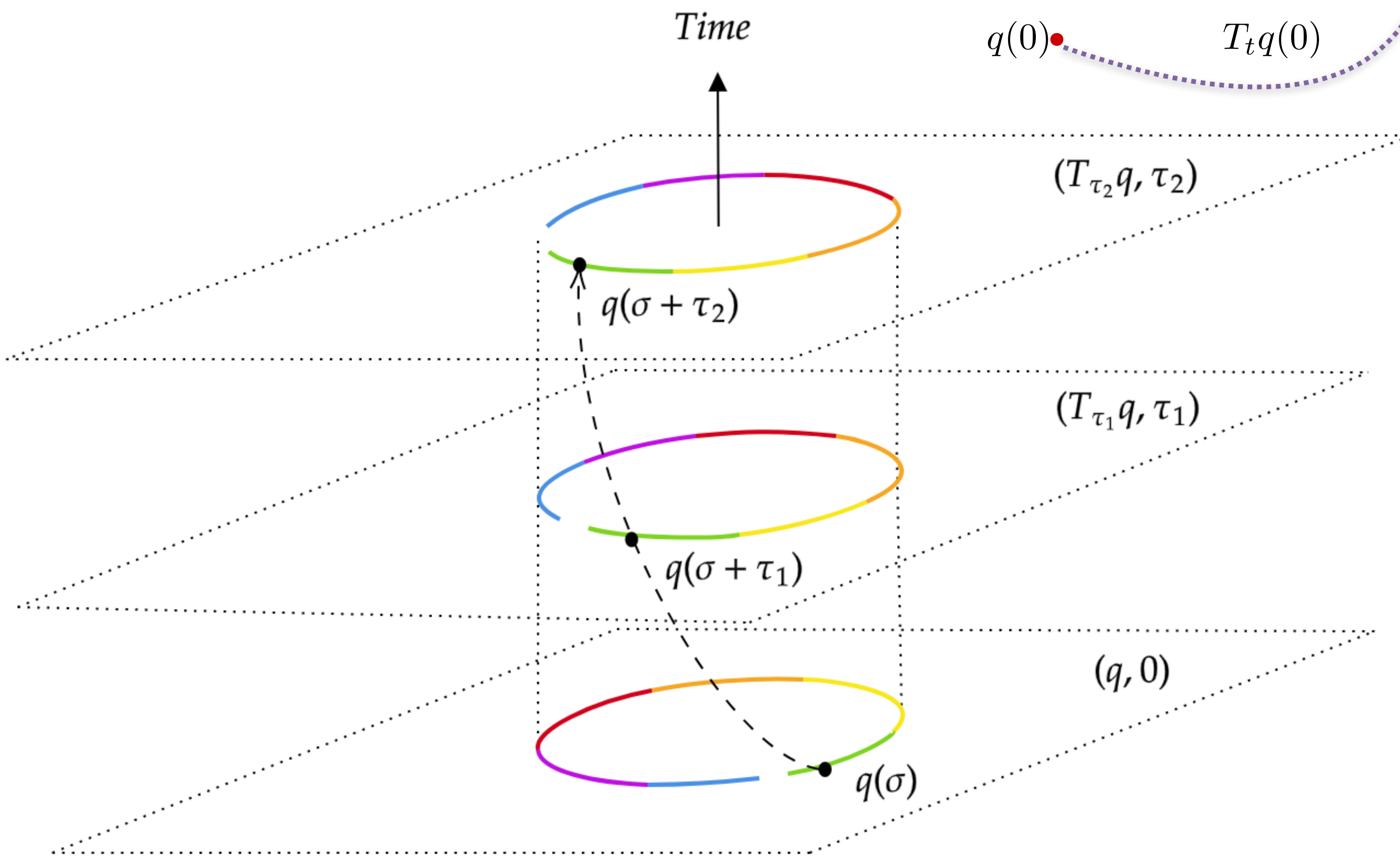
$$\left(\left\{q^{i,(r)}(t)\right\}_{r\in\mathbb{N}}, t\right) \longleftrightarrow ([q^i],t) \qquad \text{con} \qquad q^i(\sigma+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!} q^{i,(k)}(t)$$

Definitions

La curva $([T_t q]\,, t)$ visualmente es

Caso local:

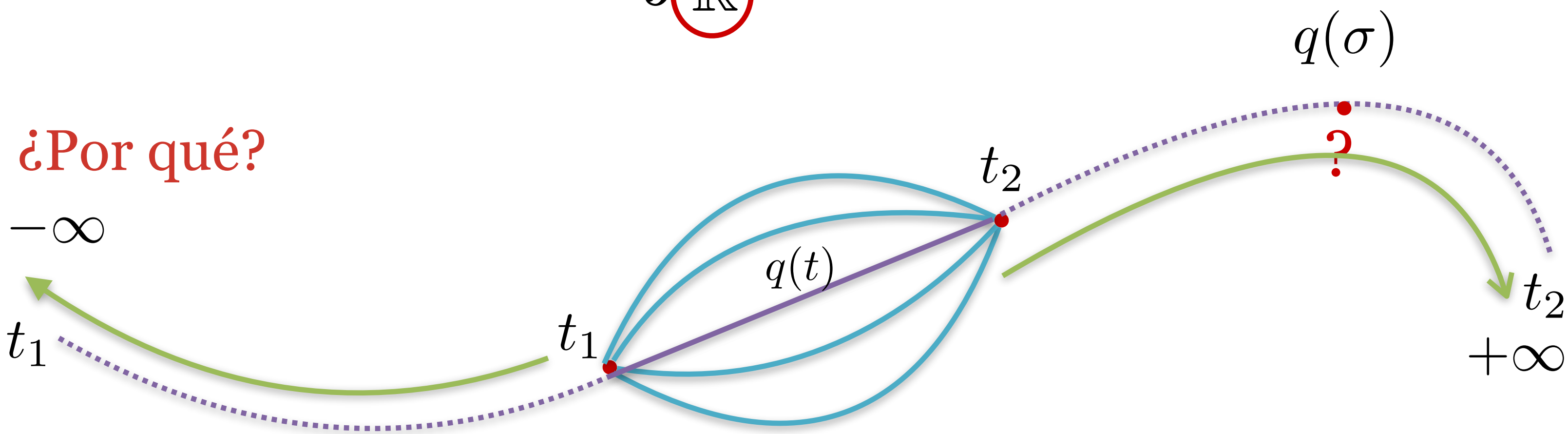




Principio de mínima acción

- **Def:** Definimos la acción integral no local como

$$S(q) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, L\left(T_t q, t\right)$$



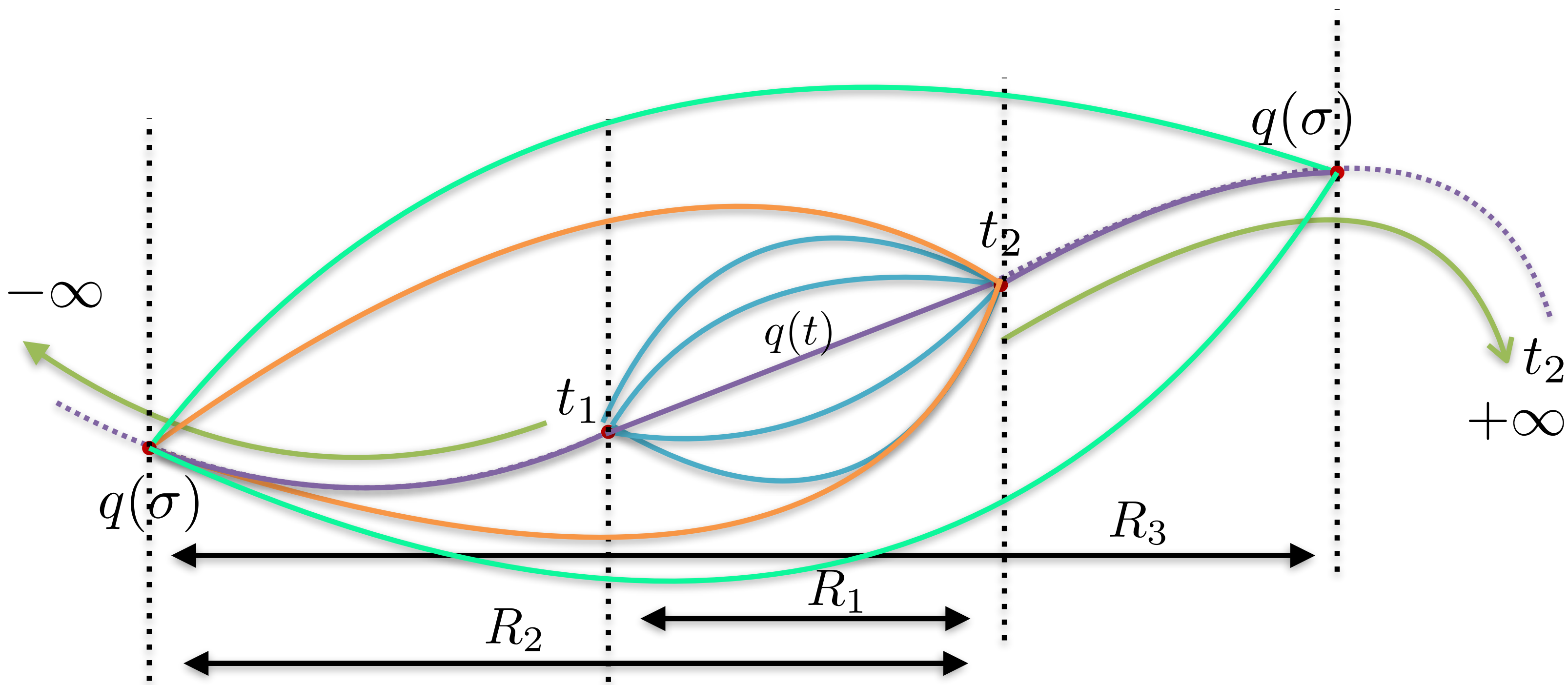
donde $t \in [t_1, t_2]$ pero, en las teorías no locales, $q(\sigma)$ con $\sigma \in \mathbb{R}$

Si no está acotada, ¿podría ser el infinito?

Podría ser. Por esa razón, introducimos

la familia de integrales de acción finita de 1 parámetro

$$S(q,R) = \int_{|t|\leq R} \mathrm{d}t\, L(T_t q, t)\,, \qquad \forall R \in \mathbb{R}^+$$



- El principio de mínima acción es

$$\lim_{R\to\infty} \delta S(q,R) \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{|t|\le R} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \, \frac{\delta L(T_t q, t)}{\delta q(\sigma)} \, \delta q(\sigma)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \, \delta q(\sigma) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, \frac{\delta L(T_t q, t)}{\delta q(\sigma)} = 0$$

$\forall \delta q(\sigma)$ de soporte compacto.

Se puede demostrar que, con una Lagrangiana estándar de primer orden, podemos recuperar las ecuaciones de Euler-Lagrange

- Siempre y cuando el límite exista, las ecuaciones no locales de Euler-Lagrange:

$\forall \sigma \in \mathbb{R}$

El problema de Cauchy!

$$\lambda(q,t,\sigma) := \frac{\delta L(T_t q, t)}{\delta q(\sigma)}$$

$$\psi(q,\sigma) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, \lambda(q,t,\sigma)$$

son: $\boxed{\psi(q,\sigma) = 0}$

- Podemos coordenar $z \in \mathcal{K}'$ de dos formas diferentes:

$$(\mathbf{a}) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K} \times \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & (\tilde{q}, t) \end{array} \qquad (\mathbf{b}) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K} \times \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & (q, t) \end{array}$$

donde $q(\sigma) = T_t \tilde{q}(\sigma) = \tilde{q}(\sigma + t)$

Nos referimos a

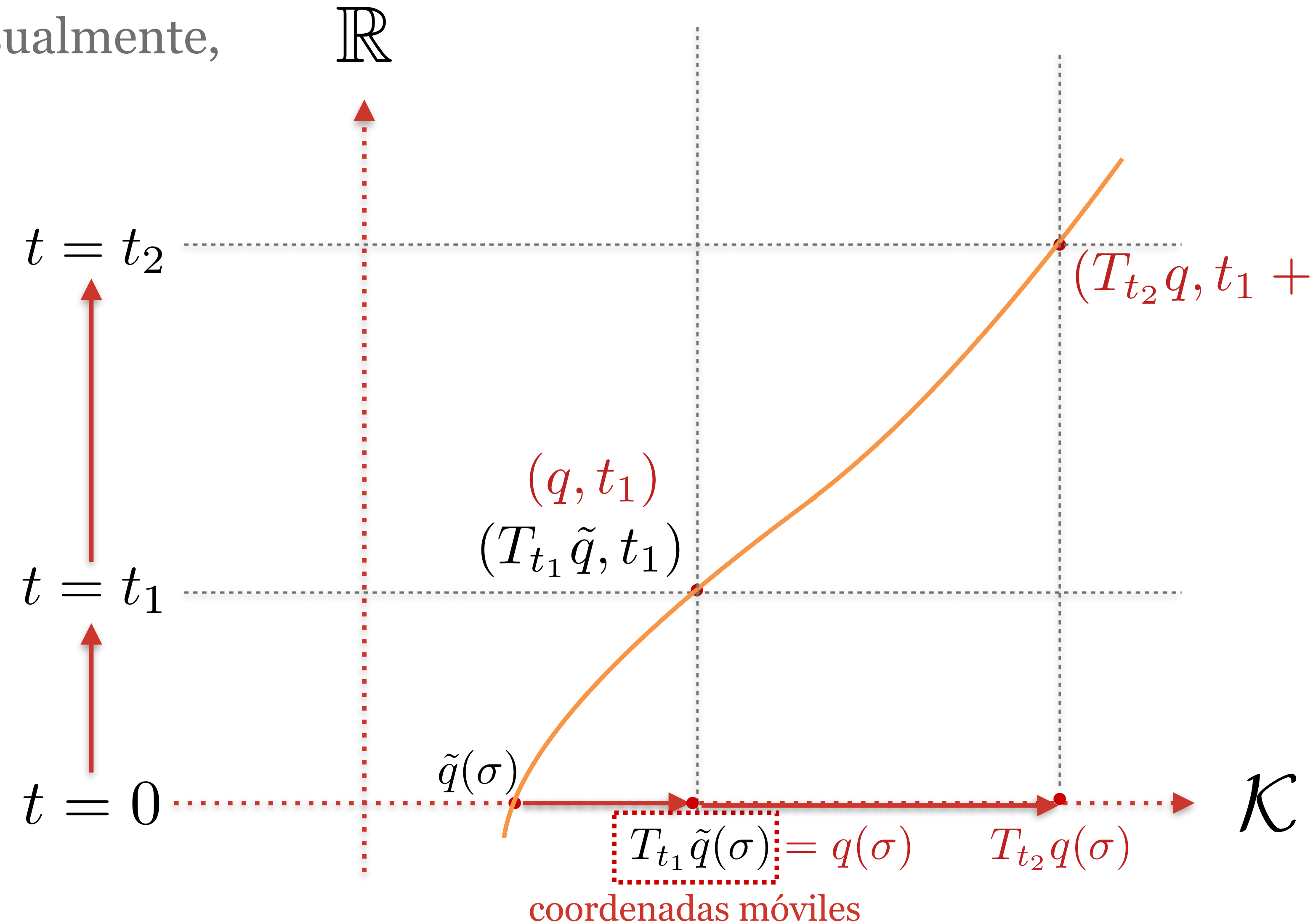
$(\tilde{q}, t)$ como coordenadas estáticas

(q, t) com coordenadas móviles

- ¿Por qué? Porque la expresión de la evolución temporal en cada uno de estos sistemas de coordenadas es:

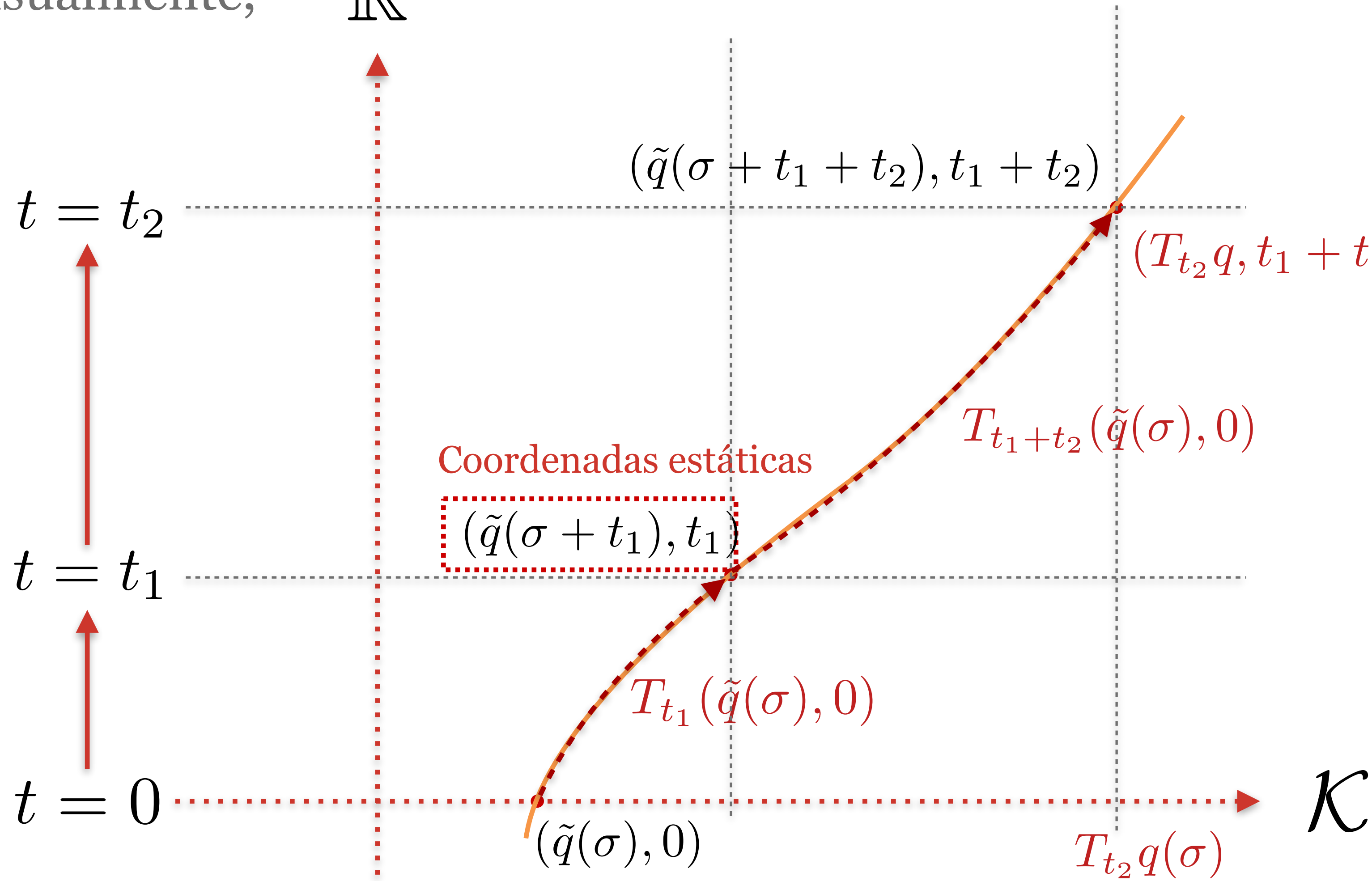
$$(\mathbf{a}) \quad (\tilde{q}, t) \xrightarrow{T_\tau} (\tilde{q}, t + \tau) \qquad (\mathbf{b}) \quad (q, t) \xrightarrow{T_\tau} (T_\tau q, t + \tau)$$

Visualmente,



Visualmente,

Recuerde que: $q(\sigma) = T_t\tilde{q}(\sigma) = \tilde{q}(\sigma + t)$



- Por lo tanto, volviendo de nuevo a las ecuaciones no locales de Euler-Lagrange,

$$\psi(q,\sigma) = 0 \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} \psi(q,\sigma) &:= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \lambda(q,t,\sigma) \\ \lambda(q,t,\sigma) &:= \frac{\delta \boxed{L(T_t q, t)}}{\delta q(\sigma)} \end{aligned}$$

Diapositiva 9: $L(T_t q) = q(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, G(-\sigma) \boxed{q(\sigma + t)}$

Vemos que se obtienen en el contexto de coordenadas estáticas, limitadas a trayectorias

$$(T_t q, t) \in \mathcal{K}' \quad \text{empezando en} \quad (q, 0)$$

- Por lo tanto, hay que entenderlo como:

$$\psi(\tilde{q},\sigma) = 0 \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \psi(\tilde{q},\sigma) &:= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \lambda(\tilde{q},t,\sigma) \\ \lambda(\tilde{q},t,\sigma) &:= \frac{\delta L(T_t\tilde{q},t)}{\delta\tilde{q}(\sigma)} \end{aligned}$$

- En coordenadas móviles, pero ¿por qué? quiero que la trayectoria:

$$(\tilde{q},t) \quad \text{y no en} \quad (\tilde{q},0) \qquad \boxed{L(q,t) \sim \cancelto{1}{e^t} f(q)}$$

$$L(T_t\tilde{q},t) \xrightarrow[(T_\tau q,\, t+\tau)]{q = T_t\tilde{q}} L(T_\tau q, t+\tau)$$

$$\Psi(q,t,\sigma) = 0 \quad \text{con} \quad \Psi(q,t,\sigma) \equiv \psi(\tilde{q},t+\sigma)$$

Note que: $\psi(\tilde{q},\sigma) = \Psi(q,0,\sigma)$

- El generador infinitesimal temporal $\mathbf{D}$ actuando en:

$$\mathbf{D}\psi(\tilde{q},\sigma) = \partial_t \psi(\tilde{q},\sigma)$$

$$\mathbf{D}\Psi(q,t,\sigma) = \left[\frac{\partial \Psi(T_\epsilon q, t+\epsilon, \sigma)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0}$$

- De hecho, las ecuaciones de Euler-Lagrange no locales son estables bajo la evolución del tiempo:

$$\mathbf{D}\psi(\tilde{q},\sigma) = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{D}\Psi(q,t,\sigma) = 0$$

- **Def:** El espacio dinámico extendido $\mathcal{D}'$ es la clase de todas las las trayectorias dinámicas, es decir, aquellas (q,t) que satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Entonces, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{K}'$

- **Obs:** Por regla general, no existen teoremas generales de existencia y unicidad para ecuaciones integrodiferenciales.

Por lo tanto, la coordinación del espacio dinámico con las condiciones iniciales dependerá del caso.

- Una visión alternativa de las ecuaciones de Euler-Lagrange no locales:

Son las restricciones (de forma implícita) que definen el espacio dinámico ampliado como un subvariedad del espacio cinemático.

Teorema de Noether

Teorema de Noether para Lagrangianos no locales

- Consideremos las transformaciones infinitesimales:

$$t'(t) = t + \delta t(t) \qquad \text{y} \qquad \tilde{q}'(t) = \tilde{q}(t) + \delta\tilde{q}(t)$$

El Lagrangiano no local se transformará de forma que deje invariante la integral de acción no local, es decir,

$$L'(T_{t'}\tilde{q}', t') = \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right| L(T_t\tilde{q}, t)$$

Así que, si $[t_0, t_1]$ y $[t'_0, t'_1]$ es el transformado,

$$\int_{t'_0}^{t'_1} \mathrm{d}t'\, L'(T_{t'}\tilde{q}', t') = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L(T_t\tilde{q}, t)$$

- Como $S'(\tilde{q}', t_0', t_1') = S(\tilde{q}, t_0, t_1)$

$$\int_{t_0'}^{t_1'} \mathrm{d}t\, L'(T_t\tilde{q}', t) - \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L(T_t\tilde{q}, t) = 0$$

donde la variable dummy t' es remplazada por t

- Dadas esas transformaciones infinitesimales, la primera integral puede aproximarse en el orden principal como

$$\int_{t_0'}^{t_1'} \mathrm{d}t\, L'(T_t\tilde{q}', t) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ L'(T_t\tilde{q}', t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q}, t)\delta t\right] \right\}$$

Por lo tanto,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ L'(T_t\tilde{q}', t) - L(T_t\tilde{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q}, t)\delta t\right] \right\} = 0$$

Teorema de Noether

- Decimos que una transformación es una simetría de Noether si

$$L'(T_t\tilde{q}',t) = L(T_t\tilde{q}',t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(T_t\tilde{q}',t)$$

- Estas cantidades llegan a ser hasta el orden principal:

$q'(t) = q(t) + \delta q(t)$

$$L(T_t\tilde{q}',t) \doteq L(T_t\tilde{q},t) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \overbrace{\frac{\delta L(T_t\tilde{q},t)}{\delta\tilde{q}(\sigma)}}^{\lambda(\tilde{q},t,\sigma)} \delta\tilde{q}(\sigma)$$

$$W(T_t\tilde{q}',t) = W(T_t\tilde{q},t) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \frac{\delta W(T_t\tilde{q},t)}{\delta\tilde{q}(\sigma)} \delta\tilde{q}(\sigma)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{L'(T_t\tilde{q}',t) = L(T_t\tilde{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(T_t\tilde{q},t) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \lambda(\tilde{q},t,\sigma)\delta\tilde{q}(\sigma)}$$

- Introduzcamos la última ecuación en

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ L'(T_t\tilde{q}', t) - L(T_t\tilde{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q}, t)\delta t\right] \right\} = 0$$

- Así que,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ \delta L + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\delta \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(q,\dot{q},t)\delta t\right] \right\}$$

Caso local...

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ \boxed{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \lambda(\tilde{q}, t, \sigma)\, \delta\tilde{q}(\sigma)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q}, t)\delta t + W(T_t\tilde{q}, t)\right] \right\} = 0$$

¡Punto crucial! ¿Cómo se obtienen los términos de frontera y las EOMs?

Recuerde que: $\psi(\tilde{q}, \sigma) = 0$ con $\psi(\tilde{q}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \lambda(\tilde{q}, t, \sigma)$

- Sumemos y restemos: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \lambda(\tilde{q}, \sigma, t)\delta\tilde{q}(t) = \psi(\tilde{q}, t)\delta\tilde{q}(t)$

- Obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ \psi(\tilde{q},t)\delta\tilde{q}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q},t)\delta t + W(T_t\tilde{q},t)\right] \right.$$

Is there a way to link them?

$$\left. \boxed{+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \lambda(\tilde{q},t,\sigma)\delta\tilde{q}(\sigma) - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \lambda(\tilde{q},\sigma,t)\delta\tilde{q}(t) \right\}} = 0$$

- Tras un adecuado cambio de variable:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi \, \left[\lambda(\tilde{q},t,t+\xi)\,\delta\tilde{q}(t+\xi) - \lambda(\tilde{q},t-\xi,t)\,\delta\tilde{q}(t)\right]$$

- Ahora, utilizando la siguiente identidad:

$$\lambda(\tilde{q},t,t+\xi)\,\delta\tilde{q}(t+\xi) - \lambda(\tilde{q},t-\xi,t)\,\delta\tilde{q}(t) =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\eta \, \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\lambda(\tilde{q},t+(\eta-1)\xi,t+\eta\xi)\,\delta\tilde{q}(t+\eta\xi)\right]$$

$$= \xi \int_0^1 \mathrm{d}\eta \, \frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda(\tilde{q},t+(\eta-1)\xi,t+\eta\xi)\,\delta\tilde{q}(t+\eta\xi)\right]$$

- Encontramos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left\{ \psi(\tilde{q},t)\delta\tilde{q}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L(T_t\tilde{q},t)\delta t + W(T_t\tilde{q},t) + U(T_t\tilde{q},t)\right] \right\} = 0$$

donde

$$U(T_t\tilde{q},t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\, \xi \int_0^1 \mathrm{d}\eta\, \lambda(\tilde{q}, t+(\eta-1)\xi, t+\eta\xi)\, \delta\tilde{q}(t+\eta\xi)$$

$\vdots$ (un poco de álgebra)

Utilizando la analogía con el caso local, ¡ésta será la transformación de Legendre para Lagrangianos no locales!

$$U(T_t\tilde{q},t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\rho\, \delta\tilde{q}(t+\rho)\, P(\tilde{q},t,\rho)$$ con

$$\boxed{P(\tilde{q},t,\rho) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\zeta\, \left[\theta(\rho) - \theta(\zeta)\right] \frac{\delta L(T_{t+\zeta}\tilde{q}, t+\zeta)}{\delta\tilde{q}(t+\rho)}}$$

Teorema de Noether

Como la elección del intervalo es completamente arbitraria,

- la identidad de Noether:

$$\boxed{\psi(\tilde{q},t)\,\delta\tilde{q}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\left(T_t\tilde{q},t\right)\delta t(t)+W\left(T_t\tilde{q},t\right)+U\left(T_t\tilde{q},t\right)\right]\equiv 0}$$

- y la cantidad conservada de Noether: Obviamente: $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(T_t\tilde{q},t)\right|_{\psi=0}=0$

$$\boxed{J(T_t\tilde{q},t):=L\left(T_t\tilde{q},t\right)\delta t(t)+W\left(T_t\tilde{q},t\right)+U\left(T_t\tilde{q},t\right)}$$

Acabamos de extender el teorema de Noether para Lagrangianos no locales.

Función Energía

Función Energía

- En primer lugar, reescribamos la corriente de Noether en coordenadas móviles $q = T_t \tilde{q}$

Entonces,

$$J(q,t) = L\,(q,t)\,\delta t(t) + W(q,t) + U(q,t)$$

donde

$$U(q,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\rho\,\delta q(\rho)\,P(q,t,\rho)$$

con

$$P(q,t,\rho) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\zeta\;[\theta(\rho) - \theta(\zeta)]\;\frac{\delta L(T_\zeta q, t+\zeta)}{\delta q(\rho)}$$

- Consideremos la transformación de traslación temporal

$$\delta t = \epsilon \quad \text{y} \quad \delta q = -\epsilon\,\dot{q}$$

- **Def:** La función de energía -en coordenadas móviles- es

$$E(q) := -\epsilon^{-1} J(q) = -L\,(q) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\rho\, \dot{q}(\rho)\, P(q,\rho)$$

con

$$P(q,\rho) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\zeta\, \left[\theta(\rho) - \theta(\zeta)\right] \frac{\delta L(T_\zeta q)}{\delta q(\rho)}$$

donde hemos supuesto que la Lagrangiana no local no depende explícitamente del tiempo $W(q) = 0.$

Considerando un Lagrangiano de primer orden, se puede recuperar la estructura habitual de la función de energía.

$$E(q_0, \dot{q}_0) := \frac{\partial L_L(q_0, \dot{q}_0)}{\partial \dot{q}_0} \dot{q}_0 - L_L(q_0, \dot{q}_0)$$

Formalismo Hamiltoniano

- **Def:** El Hamiltoniano no local en el espacio de fase ampliado $\Gamma' = \Gamma \times \mathbb{R}$ se define -en coordenadas móviles- como sigue:

$$H(q,\pi,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \, \pi(\sigma)\, \dot{q}(\sigma) - L(q,t)$$

que está equipado con el siguiente Poisson bracket

$$\{F,G\} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \left(\frac{\delta F}{\delta q(\sigma)} \frac{\delta G}{\delta \pi(\sigma)} - \frac{\delta F}{\delta \pi(\sigma)} \frac{\delta G}{\delta q(\sigma)} \right)$$

- Las ec. de Hamilton son $\begin{cases} \mathbf{X}_H q(\sigma) = \dot{q}(\sigma) \\ \mathbf{X}_H \pi(\sigma) = \dot{\pi}(\sigma) + \dfrac{\delta L(q,t)}{\delta q(\sigma)} \end{cases}$

donde $\mathbf{X}_H$ es el campo vectorial hamiltoniano

$$\mathbf{X}_H = \partial_t + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \left(\dot{q}(\sigma) \frac{\delta}{\delta q(\sigma)} + \left[\dot{\pi}(\sigma) + \frac{\delta L(q,t)}{\delta q(\sigma)} \right] \frac{\delta}{\delta \pi(\sigma)} \right)$$

- Las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse de una forma más compacta utilizando la dos forma diferencial de contacto:

$$\Omega' = \Omega - \delta H \wedge \delta t \quad \text{con} \quad \Omega = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \, \underbrace{\boxed{\delta}}_{\text{(diferencial)}}\pi(\sigma) \wedge \delta q(\sigma)$$

Es decir,

$$i_{\mathbf{X}_H} \Omega' = 0$$

Hasta ahora, este sistema hamiltoniano no tiene nada que ver con la formulación Lagrangiana presentada anteriormente.
¿Cómo podemos relacionarlos?

- Podemos conectar ambos a través de la **inyección**:

$$(q,t) \in \mathcal{D}' \xrightarrow{j} (q,\pi,t) \in \Gamma'$$

donde

Es el prefactor de la cantidad conservada de Noether

$\delta q(\sigma) P(q,t,\sigma)$

$$\pi(\sigma) := P(q,t,\sigma)$$

- **Def:** j define un mapa unívoco desde $\mathcal{D}'$ en $j(\mathcal{D}') \subset \Gamma'$ es decir, una subvariedad definida implícitamente por las restricciones:

$$\Psi\,(q,t,\sigma) = 0 \quad \text{y} \quad \Upsilon\,(q,\pi,t,\sigma) := \pi(\sigma) - P(q,t,\sigma) = 0$$

- Además, $j^T\mathbf{D} = X_{\mathbf{H}}$

En consecuencia, las restricciones son estables por el flujo hamiltoniano.

- Para traducir el formalismo hamiltoniano en Γ' en $\mathcal{D}'$, usamos el pullback j^*

Por lo tanto, la forma de contacto $\omega' \in \Lambda^2(\mathcal{D}')$ es $\omega' := j^*\Omega'$

$$\omega'(q,t) = \omega(q,t) - \delta h(q,t) \wedge \delta t$$

donde

$$\omega(q,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma\, \delta P(q,t,\sigma) \wedge \delta q(\sigma)$$

Está cerca, ¡pero no está claro si es no degenerado!

y, como $j^T\mathbf{D} = \mathbf{X}_H$ las ecuaciones de Hamilton son

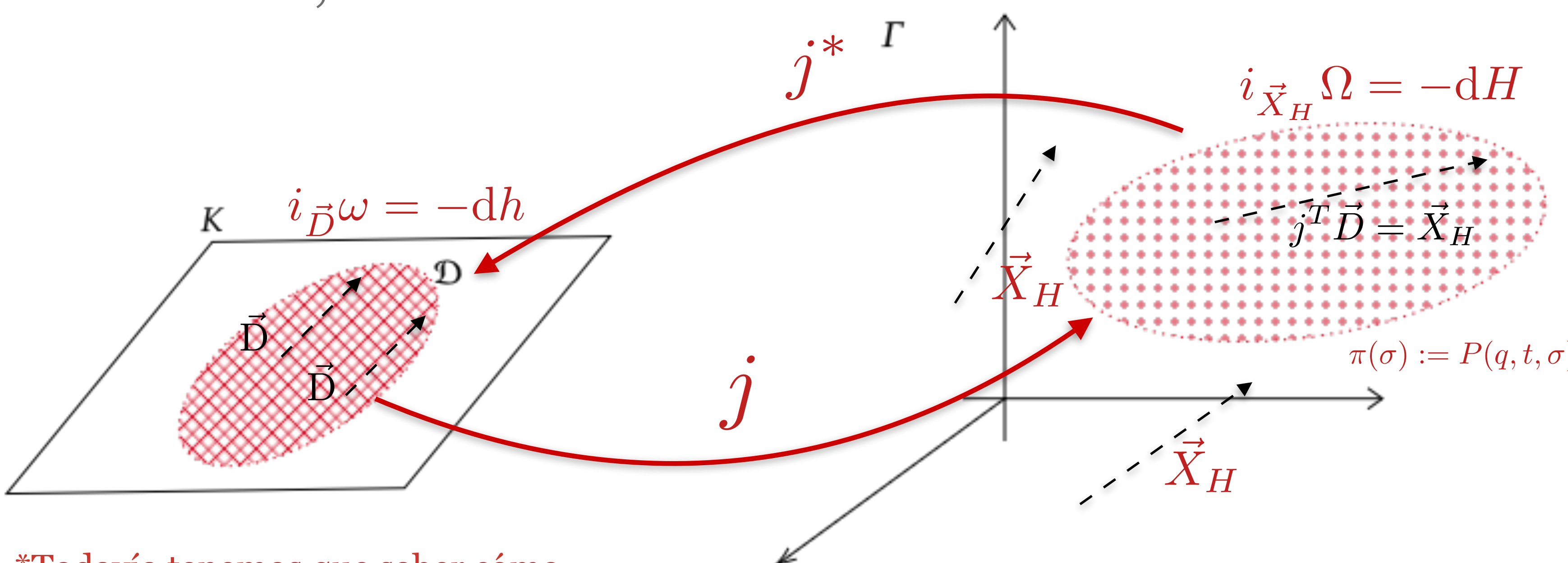
$$i_{\mathbf{X}_H}\Omega' = 0 \xrightarrow{\quad j^* \quad} i_{\mathbf{D}}\omega' = 0$$

Form. Hamiltoniano

Por último, el Hamiltoniano en $\mathcal{D}'$ es $h := j^* H$

$$h(q,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma \, P(q,t,\sigma)\dot{q}(\sigma) - L(q,t)$$

Visualmente,



*Todavía tenemos que saber cómo coordinar el espacio dinámico.

Aplicaciones

Oscilador Armónico NL

Consideremos la siguiente acción:

$K(\zeta) = e^{-|\zeta|}$

$$S(\tilde{q}, R) = \int_{|t|\leq R} \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^2(t) - \frac{\omega^2}{2}\tilde{q}^2(t) + \frac{g}{4}\tilde{q}(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\zeta\, K(\zeta)\,\tilde{q}(t-\zeta)\right]$$

Solución de las **EOMs**: $q(\sigma) = \sum_{j=1}^{4} B^j e^{\sigma r_j}$ con $|\mathbb{Re}(r_j)| < 1$

Estable: $g \leq 0$ o $\max\{1, 2\sqrt{g} - 1\} < \omega^2 < g$

Estas son las coordenadas de $\mathcal{D}'$

Estas son las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{D}'$

Los **momentos**: $P(q,\sigma) = \sum_{j=1}^{4} B^j \left(r_j \delta(\sigma) + \frac{g}{4}\frac{e^{-|\sigma|}}{r_j + \mathrm{sign}(\sigma)}\right)$

La **forma simplética**: $\omega = \delta p_0 \wedge \delta q_0 + \delta\pi_0 \wedge \delta\xi_0$

Los corchetes de Poisson elementales son:

$\{q_0, p_0\} = \{\xi_0, \pi_0\} = 1$

El **Hamiltoniano**: $h(p_0, q_0, \pi_0, \xi_0) = \frac{1}{2}p_0^2 + \frac{\omega^2}{2}q_0^2 - \sqrt{g}\, q_0\, \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0^2 - \frac{1}{2}\xi_0^2$

Medios dispersivos:

$$M^{abcd}(x) = (2\pi)^{-2}\left[m(x)\,\hat{\eta}^{a[c}\hat{\eta}^{d]b} + 2\varepsilon(x)\,u^{[a}\hat{\eta}^{b][c}u^{d]}\right]$$

$$S(\tilde{A}, R) = \frac{1}{4}\int_{|x|\leq R} \mathrm{d}x\, \tilde{F}_{ab}(x)\left(M^{abcd} * \tilde{F}_{cd}\right)_{(x)}$$

El tensor de energía momento de Belinfante-Rosenfeld

(para un paquete de ondas)

$$\mathcal{U} \approx \frac{1}{4}\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left[\frac{\mathrm{d}(\varepsilon\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\underline{\tilde{\mathbf{E}}}\cdot\underline{\tilde{\mathbf{E}}}^* + \frac{\mu^*}{\mu}\,\frac{\mathrm{d}(\mu\omega)}{\mathrm{d}\omega}\,\underline{\tilde{\mathbf{H}}}\cdot\underline{\tilde{\mathbf{H}}}^*\right]$$

$$G^i \approx \frac{1}{4}\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left[\frac{1}{\omega\mu}\,\frac{\mathrm{d}(\varepsilon\mu\omega^2)}{\mathrm{d}\omega}\,\underline{\tilde{\mathbf{E}}}\times\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^*\right]$$

$$S^i \approx \frac{1}{2}\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left[\underline{\tilde{\mathbf{E}}}^*\times\underline{\tilde{\mathbf{H}}}^*\right]$$

$$T^{ij} \approx \frac{1}{2}\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left[\underline{\tilde{E}}^{*\,i}\,\underline{\tilde{D}}^j + \underline{\tilde{H}}^i\,\underline{\tilde{B}}^{*\,j} - \frac{1}{2}\left(\underline{\tilde{\mathbf{D}}}\cdot\underline{\tilde{\mathbf{E}}}^* + \underline{\tilde{\mathbf{H}}}\cdot\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^*\right)\delta^{ij}\right]$$

Teoría Gauge U(1) no conmutativa:

$$S(\tilde{A}, R) = \int_{|x|\leq R} \mathrm{d}x \left(-\frac{1}{4}\, \tilde{F}^{ab}(x)\, \tilde{F}_{ab}(x) \right)$$

$$\tilde{F}_{ab} := \partial_a \tilde{A}_b - \partial_b \tilde{A}_a - i[\tilde{A}_a, \tilde{A}_b]$$

$$[f, g] = f * g - g * f\,, \qquad (f * g)_{(x)} := \frac{1}{\pi^4 |\theta|} \int_{\mathbb{R}^8} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, f(x-u)\, g(x-v)\, e^{2iu\tilde{\theta}v}$$

Segundo teorema de Noether:
(extensión no explicada)

$$\begin{cases} \delta \tilde{A}_a(x) = D_a \epsilon(x) \\ D_a f = \partial_a f - i[\tilde{A}_a, f] \end{cases}$$

$$D_a D_b \tilde{F}^{ab} \equiv 0$$

Conclusiones

Conclusiones

Hemos visto que:

- Hemos desarrollado un nuevo formalismo para tratar con Lagrangianos no locales.
- Hemos extendido el teorema de Noether para ellos.

  Nos da, por analogía con el caso local, la definición de la transformada de Legendre.
- Proponemos un formalismo hamiltoniano para ellos. Una vez que sabemos como coordenar el espacio dinámico ampliado, nos proporciona el Hamiltoniano y la forma simpléctica.

Conclusiones

Observaciones:

- Todo lo anterior lo hemos extendido a la teoría de campos clásica.
- Aplicaciones:
    - Electrodinámica no local - Medios Dispersivos.
    - Osciladores armónicos no locales.
    - Cuerdas p-ádicas.
    - Teorías gauge U(1) no conmutativa.

Y ¿la gravedad?

¿Se podría aplicar este formalismo a Gravedad no local?

$$\left.\begin{array}{l} \text{IDG: } \mathcal{L} \sim f(x) e^{-r\Box} f(x) \\ \\ e^{-r\Box} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r\Box)^n}{n!} \qquad \Box = \partial_\mu \partial^\mu \\ \\ \text{GNL: } \mathcal{L} \sim f(x) \frac{1}{\Box} f(x) \end{array}\right\} \sim f(x) \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}y \overset{?}{K(x,y)} f(y)$$

* Las derivadas totales no locales, ¿dejan invariantes las EOMs?

Gracias!

¿Alguna pregunta?

Prof. Josep Llosa

C. Heredia Pimienta Ph.D.

www.carlosherediapimienta.com